

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅
管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间: 2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

概率笔记6——多维随机变量

和其它问题一样，概率也可能同时受到多个条件的影响，例如考察某地区中学生的身体素质，随机地选取一名学生，观察学生的身高 X ，体重 Y 和肺活量 Z 等指标。随机变量 X, Y, Z 来自同一样本空间，它们的取值可能相互影响。像这样同时考虑的多个随机变量，称为多维随机变量。本章以二维随机变量为例，介绍多维随机变量的相关概念。

联合分布

和一维变量的概率分布类似，联合分布把舞台扩展到了多维，这里的“联合”就是多个随机变量的意思。

假设一个事件受到两个变量 x 和 y 的影响，它的联合分布定义为：

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

其中 X 表示具体的取值， x 表示变量。

上一章提到过，分布是指概率的累加，是把事件映射为数字，一个二维联合分布的变量取值范围是整个二维平面，但 $F(x, y)$ 的取值范围是 $0 \sim 1$ 。

离散型

联合概率

联合概率指的是包含多个条件且所有条件同时成立的概率，也叫联合分布率。

用 x_i 和 y_j 的两个随机变量所有可能的取值， $P(X=x_i, Y=y_j)$ 表示在 $X=x_i$ 和 $Y=y_j$ 下事件发生的概率。设 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$ ，则下表是二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合概率：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

联合分布率实际上是一个矩阵。既然是概率，联合概率也满足下面两个条件：

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

联合分布

一维随机变量的分布函数:

$$F(x) = P\{X \leq x\}, \quad -\infty < x < \infty$$

二维随机变量的分布函数:

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

其中:

- (1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$
- (2) $F(-\infty, y) = 0, \quad F(x, -\infty) = 0, \quad F(-\infty, -\infty) = 0$
- (3) $F(-\infty, \infty) = 1$

分布函数和分布略有区别, “分布”是指累加概率, “分布函数”是将累加概率函数化。 $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$ 是分布函数, 它的值是所有在 $X \leq x, Y \leq y$ 下的概率分布。

边缘分布

先看表1的第一行, 它固定了 $x = x_1$, 此时在表格右侧加入一列:

	y_1	y_2	...	y_j	...	
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	$p_{1\cdot}$

$p_{1\cdot}$ 表示 x 的取值固定, y 取任意值时的概率分布, 即:

$$p_{1\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{1j}$$

由于 $p_{1\cdot}$ 是写在表格的边缘, 所以称为 $x = x_1$ 的边缘分布。对于任意行来说:

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

这实际上是在表示 $X = x_i$ 时事件发生的概率。类似的, $y = y_j$ 的边缘分布是:

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

条件概率

条件概率是指在A事件发生的条件下, 事件B发生的概率, 表示为 $P(B|A)$, 它有一个重要公式:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) > 0)$$

多维随机变量的条件概率公式与此类似, 在 $Y = y_j$ 条件下 $X = x_i$ 的概率:

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \Rightarrow \text{条件概率} = \frac{\text{联合概率}}{\text{边缘分布}}$$

独立性

对于二维离散型随机变量 (X, Y) 来说, 如果满足:

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\forall x \in X, y \in Y, \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

那么这两个随机变量之间是没有相互影响的，称X和Y之间互相独立。反过来也一样，如果满足了独立性，那么必然有上式的关系。

连续型

由于是连续型变量，所以无法像离散型变量那样简单地计算在某一点的概率（概率可以表示为几何度量，点的度量是0，因此算某一点的概率也是0，或者说计算点的概率没有意义），只能计算某一取值范围内的概率，也就是概率分布（概率的累加）。

联合概率密度函数和联合分布

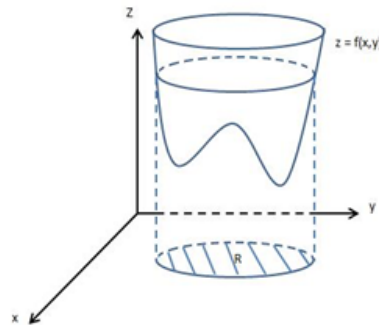
某个地区的人口密度越大，这个地区的人口越多。同样的，概率密度越大，说明这个区域的发生某件事的概率越大。

设 $F(x,y)$ 是二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合分布函数，如果存在一个非负函数 $f(x,y)$ ，对于任意实数 x,y ，有：

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) dv du$$

则称 $f(x,y)$ 是二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数。

u 和 v 在计算后定积分后会被 x 和 y 代替。可以对比上一章中一维随机变量的分布函数来理解 $F(x,y)$ 。概率分布是概率的累加，而累加正好是积分的定义。在几何上， $F(x,y)$ 表示了曲面柱体的体积：



假设在 R 区域上， $x_1 < x < x_2$ ， $y_1 < y < y_2$ ，那么该区域上的概率分布是：

$$P\{(x,y) \in R\} = F(x,y) = \iint_R f(x,y) dy dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y) dy dx$$

$dy dx$ 是 R 上的面积积元，它是面积无限接近0的小矩形，但不是0。至此，概率和多重积分联系到一起。上式中没有 u 和 v ，这是由于已经确定了 x 和 y 的取值范围，且 f 本来就是关于 x 和 y 的函数，因此没必要再引入 u 和 v 。如果非要使用 u 和 v ，那么上式等价于：

$$P\{(x,y) \in R\} = F(x,y) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y) dy dx = \int_{u=x_1}^{u=x_2} \int_{v=y_1}^{v=y_2} f(u,v) dv du$$

由于 F 是分布函数，因此在整个定义域上满足：

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy dx = 1$$

边缘分布和边缘密度函数

联合分布表达的是二维随机变量(X, Y)的整体分布, 同时X和Y也有各自的边缘分布。与离散型类似, 连续型随机变量的边缘分布是只认为有一个变量, 其它变量都看作常量。

X的边缘分布, 表示将x看作常量, 不管Y的取值:

$$F_X(x) = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$$

Y的边缘分布, 表示将y看作常量, 不管x的取值:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y, X < \infty\} = F(\infty, y)$$

设(X, Y)的联合密度函数是f(x,y), 那么(X, Y)的联合分布可以表示为:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

X的边缘分布限定了X的取值是 $X \leq x$, y可以取任意值, 此时X的边缘分布可以写成:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv du$$

分布代表了累加, 连续型分布是用积分表示的, $F_X(x)$ 表示 $P\{X \leq x, Y < \infty\}$ 的累加, 是对dx的积分, 因此X的边缘分布的密度函数是上式的内积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv$$

把u,v换成x,y, X的边缘分布的密度函数是:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

类似的, Y的边缘分布的密度函数是:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

条件分布和条件密度函数

条件概率公式:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

对于连续型变量来说, 单点的概率没有意义, 因此将上式推广到连续型随机变量后就变成了“分布”, 比如给定Y值的条件下X的概率分布。

设(X, Y)的联合密度函数是f(x,y), 边缘密度函数是 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 如果固定x, 则称下式为X=x条件下Y的概率密度:

$$f_{Y|X}(y|X=x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \Rightarrow \text{条件密度} = \frac{\text{联合密度}}{\text{边缘密度}}$$

同样, Y=y条件下X的概率密度:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

有了概率密度，自然可以求得相应的分布，给定Y值的条件下X的概率分布：

$$F_{X|Y}(x) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(u|y) du$$

独立性

对于二维连续型随机变量(X, Y)来说，如果满足：

$$\forall x \in X, y \in Y, \quad f_X(x)f_Y(y) = f(x, y)$$

那么这两个随机变量之间是没有相互影响的，称X和Y之间互相独立。反过来也一样，如果满足了独立性，那么必然有上式的关系。

二维均匀分布

设R是平面上的有界区域，面积为A，若二维随机变量(X, Y)具有概率密度：

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in R \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

则称(X, Y)在R上服从均匀分布。

如果在R区域上x在 $x_1 < x < x_2$ 上服从均匀分布，那么X在 $x_1 < x < x_2$ 的边缘分布的密度函数是：

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1}, & x_1 < x < x_2 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

若(X, Y)服从R区域上的均匀分布，则对于R上的任一子区域D，都有：

$$F(x, y) = P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \frac{1}{A} dx dy = \frac{\text{Area}(D)}{A}$$

上式实际上是在说，如果(X, Y)在某个区域内服从均匀分布，则意味着(X, Y)在该区域内具有“等可能”性。

二维正态分布

若二维随机变量(X, Y)具有概率密度：

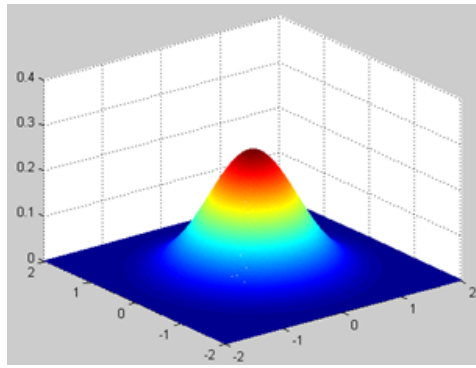
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{2\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho \in \mathbb{C}, \quad \sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \quad |\rho| < 1$$

则称(X, Y)服从参数为 的二维正态分布，记作：

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

f(x, y)的是一个倒钟型曲面：



示例

示例1

X服从(0,1)上的均匀分布, 在 $X=x(0 < x < 1)$ 的条件下, Y在(0,x)内服从均匀分布, $f(x,y)=?$, 2. $f_Y(y)=?$

先看1, X服从某一个区域的边缘分布意味着:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1}, & x_1 < x < x_2 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

X服从(0,1)上的均匀分布, 则 $x_1 = 0, x_2 = 1$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

“Y在(0,x)内服从均匀分布”:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{y-0}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ \Rightarrow f(x,y) &= f_{Y|X}(y|x)f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Y的边缘分布的密度函数是:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

现在只需要确定的积分域即可, 由 $0 < y < x < 1$ 可知, 积分上限是1, 下限是y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 \frac{1}{x} dx, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} = \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

示例2

设二维随机变量(X, Y)的联合概率密度是:

$$f(x,y) = \begin{cases} Ae^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

1. A=? 2.求分布函数F(x,y) 3.求概率P{Y≤X}

1. 整个定义域上分布函数满足：

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = 1 \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(x, y) dy dx + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) dy dx \\
 &= 0 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A e^{-2x} e^{-y} dy dx \\
 &= A \int_0^{\infty} e^{-2x} dx \int_0^{\infty} e^{-y} dy \\
 &= A \left(\left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^{\infty} \right) (-e^{-y} \Big|_0^{\infty}) \\
 &= \frac{1}{2} A \\
 &\Rightarrow \frac{1}{2} A = 1 \Rightarrow A = 2
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \begin{cases} 2 \int_0^x e^{-2x} dx \int_0^y e^{-y} dy, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{others} \end{cases}
 \end{aligned}$$

3.

$$P\{Y \leq X\} = \begin{cases} 2 \int_0^{\infty} e^{-2x} dx \int_0^x e^{-y} dy = \frac{1}{3}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: 概率

标签: 多维随机变量, 联合概率, 联合分布, 均匀分布, 条件分布

好文要顶

关注我

收藏该文





我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

推荐

反对

« 上一篇: 异常检测(1)——局部异常因子算法

» 下一篇: 概率笔记7——数学期望

posted on 2019-06-25 16:50

我是8位的

阅读(6071)

评论(0)

编辑

收藏

举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推 “杀手级” 功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
[博客园](#)
Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes